Pozitív egész kitevőjű hatványösszegekről

Történeti és módszertani áttekintés

Doktori értekezés tézisei

Molnár István

Témavezető:

Dr. Kosztolányi József egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2011
Szeged

I. A témaválasztás indoklása, célkitűzések, kutatási előzmények

A matematika tudománytörténeti fejlődésében két, egymással szoros összefüggésben lévő tendencia figyelhető meg. Egyfelől – ahogy haladunk előre az időben − e diszciplína művelői új összefüggéseket, konkrét tudományos ismereteket állapítanak meg, másrészt e folyamat során állandóan megújítják, gazdagítják a matematika módszertani eszköztárát. A célirányos és helyes módszerhasználat különösen fontos a matematika közép- és felsőfokú oktatásában. Hiszen egy-egy feladat megoldása többféle módon is lehetséges, s ennek okán lényeges a különböző megoldási módok összehasonlítása, az alkalmazott ismeretanyag rendszerezése, valamint a „legegyszerűbb megoldás(ok) megtalálása" képességének fejlesztése. A módszerválasztás, az eltérő matematikai apparátusok használata és az ezekhez kapcsolódó nagyon különböző „gondolkodási utak" különösen érdekesek lehetnek a hatványösszegzési feladatokban.

1. A disszertáció gondolati és tartalmi koncepciójának meghatározásakor a matematika egy részterületén összefüggések kutatására, a választott problémához kapcsolódó felhasználható módszerek vizsgálatára és a matematika más területeivel való lehetséges kapcsolódási pontok keresésére koncentráltunk, kiegészítve mindezt a választott probléma átfogó tudománytörténeti elemzésével.
2. Értekezésünk témája az $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$, (ahol n és p természetes számok és $n \geq 1$) hatványösszegek kiszámítása, egymástól eltérő matematikai módszerek felhasználásával, s ennek kapcsán a „megoldásra váró feladat" versus „alkalmazható módszerek és matematikai ismeretek" kérdéskör lehetőség szerinti átfogó vizsgálata. Ehhez igazodva munkánkban:
   - rövid összefoglalását adjuk a probléma történetének, a megoldás fejlődési aspektusának, leírva, hogy az egyes korokban és a Föld különböző társadalmaiban kik és meddig jutottak el a megoldásban,
   - hét különböző módszer felhasználásával rendre kiszámítjuk az S_p hatványösszeget, minden esetben bemutatva nemcsak az eredményeket, hanem a megoldás gondolatmenetét is,
   - az egyes módszereknél közreadjuk a kapott általános formula néhány konkrét esetét,
   - több módszer bemutatásánál is általánosításokat végzünk (számtani sorozatok, alternáló összegek esetére), illetve kapcsolódási pontokat keresünk a matematika más területei felé, s végül
   - a függelékben bemutatunk 32 olyan matematikai feladatot, amelyek szemléletesen illusztrálják a hatványösszegek képleteinek sokféle gyakorlati használhatóságát.
3. A témaválasztás és a célok koherenciájának szem előtt tartásával a kutatómunka célkitűzéseit az alábbiakban fogalmaztuk meg:
   - elsődleges cél átfogó módon tárgyalni az S_p kiszámításának módszertanát, s eközben új módszereket felkutatni: részben támaszkodva a szakirodalom korábbi eredményeire (egyes esetekben kiegészítve azokat), részben pedig közreadva az általunk kifejlesztett új módszertani eredményeket,
   - mindegyik alkalmazott módszer lehető legteljesebb körű bemutatásával bizonyítani kívánjuk a módszerek gazdag felhasználásának lehetőségét, továbbá azt, hogy egy-egy probléma megoldása során gyakran nagyon eltérő problémaközelítések is helyénvalóak lehetnek, s ezek az igen eltérő matematikai ismereteket felhasználó utak, a végeredmény tekintetében összekapcsolódnak,
   - rövid értékelését szándékozunk adni az egyes módszerek előnyeinek és hátrányainak,

- amely módszernél arra mód nyílik, összeköttetéseket, „hidakat” akarunk találni a matematika más területei felé (Bernoulli- és Stirling-számok), s végül
- didaktikai téren pedig célunk annak behatárolása, hogy mely módszerek, miért és miként használhatók fel a középiskolai matematika világában, és melyek azok, amelyek inkább a főiskolai, egyetemi matematika oktatás körébe valók.

4. Összességében a kitűzött céljaink jellegükben az alkalmazott kutatások körébe tartoznak (döntően módszertaniak), s az elért eredményeink − reményeink szerint − a tanítási gyakorlatban (középiskolában és a felsőoktatásban) is felhasználhatók.

II. Kutatási módszerek

A kutatómunka során a célkitűzésnek megfelelően többféle vizsgálati módszert is felhasználtunk. Ezek nagyobb része matematikai, de szerepelnek az alkalmazott módszertani apparátusok között más típusú módszerek is.

1. A vizsgálat kiindulópontja a hatványösszegzés szakirodalmának áttekintése, az itt használt fogalomrendszer értelmezése és a publikációkban megfogalmazott eredmények szintetizálása, új kontextusba helyezése volt. Itt leginkább a forrásfeldolgozás és forrás-újraértelmezés vizsgálati módszere jelent meg.
2. A matematika széles módszertani kínálatából két alapvető módszert használtunk fel, illetve alkalmazhatóságának körülményeit vizsgáltuk meg. Jelesül egyrészt rekurziós összefüggésre vezető, másrészt nem rekurziós képletekre vezető módszereket vizsgáltunk.
3. A rekurziós módszerek közül a problémát öt különféle módszerrel oldottuk meg. Ezek a következők: mátrixos (táblázatos elrendezésű) módszer (ezen belül háromféleképpen összegzünk), egy speciális azonosság felhasználásával rekurziós összefüggésre vezető módszer, a binomiális tétel segítségével levezetett rekurzió, a szimmetria felhasználásával előálló rekurzió, s végül a deriválással felírható rekurziós formulára vezető módszer zárja a sort.
4. A második nagyobb matematikai módszercsoport a nem rekurziós formulára vezető metodikák csoportja. Ezek közül kettővel foglalkoztunk. Nevezetesen az egyik a differenciasorozatokat alkalmazó módszer, a másik pedig a lineáris algebra eszközeivel levezetett végformula.
5. Felhasználtunk más tudományágaknál szokványos – nem matematikai – módszereket is. A már említett forrásfeldolgozás és -újraértelmezés mellett megjelenik a munkánkban az elemzés-összehasonlítás módszere (a különböző módszerek előnyeinek, hátrányainak taglalása), valamint ábrázolástechnikai, a szemléltetést szolgáló módszerek használata is.

III. Tudományos eredmények

A. Tudománytörténeti áttekintés

Értékelő elemzését adtuk a választott téma történeti aspektusainak, bemutatva itt a hatványösszegzés problematikájának és megoldásának fejlődéstörténetét. Az egész számok azonos hatványainak összegzése, illetve összefüggések keresése hosszú időn keresztül foglalkoztatta a különböző korok matematikusait. Az ókori görög tudósok (Püthagorasz, Arkhimédész, Hüpsziklész, Nikomakhosz) – leginkább a figurális számok felhasználásával – számos részeredményt értek el. Az ókori és újkori kínai matematikában már megjelent mind a számtani sorozatok összegzése, mind pedig ezen sorozatok tetszőleges tagjának kiszámítása. Az algebrai módszereket előszeretettel alkalmazó hindu matematikusok is képesek voltak a számtani sorozat általános tagjának kiszámítására, valamint az első *n* négyzetszám, illetve köbszám összegzésére. Ezeknek az ismereteknek az arab-perzsa matematikusok szintén birtokában voltak. A középkori és kora újkori európai gondolkodók köréből Levi ben Gerson, Thomas Harriot, Johann Faulhaber, Pierre de Fermat, valamint Blaise Pascal említhetők, akik fontos részeredményekkel gazdagították a problémakört. A hatványösszeg kiszámítása minden kitevő esetére Jacob Bernoulli nevéhez fűződik, akinek sikerült általános formulát felírnia.

B. Rekurziós módszerek

Bemutattuk az S_p összeg meghatározásának öt, rekurziós képletre vezető megoldását. Ezek mindegyikében eltérő utakon jutottunk a kívánt rekurziós formulához. Az ismertetett módszerek közös tulajdonsága, hogy egy konkrét *p*-re felírt összeg kiszámításához szükség van a megelőző indexű összeg/összegek ismeretére.

1. A mátrixos (táblázatos elrendezésű) módszerhez mátrixaritmetikai fogalmakat is alkalmaztunk. Ennél a módszernél egy speciális *nxn*-es mátrixot használtunk, nevezetesen:

$$M=\begin{bmatrix} 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & n^{p-1} \\ 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & n^{p-1} \\ 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & n^{p-1} \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & n^{p-1} \end{bmatrix}$$

   Az elemeket először soronként összegeztük, majd speciális mátrixok segítségével (felső háromszög mátrix, alsó háromszög mátrix, diagonális mátrix) egy újabb összegzést végeztünk. Az egyenlőséget felírva, a részletszámítások után az alábbi rekurziós formulát kaptuk:

$$S_p=(n+1)\cdot S_{p-1}-\sum_{k=1}^{n} S_{k;p-1}\ .$$

   Felírtuk a képletnek az első öt pozitív egész hatványra vonatkozó eseteit, melyeknek egy része már a középiskolából is jól ismert összefüggés.

   A megoldás gondolatmenete alkalmazható az alternáló összeg – $S_p^*=1^p-2^p+3^p-4^p+\dots+(-1)^{n-1}\cdot n^p$ – esetére is. Ebben az esetben egy másik – az előzőhöz hasonló – speciális mátrixot használtunk, éspedig:

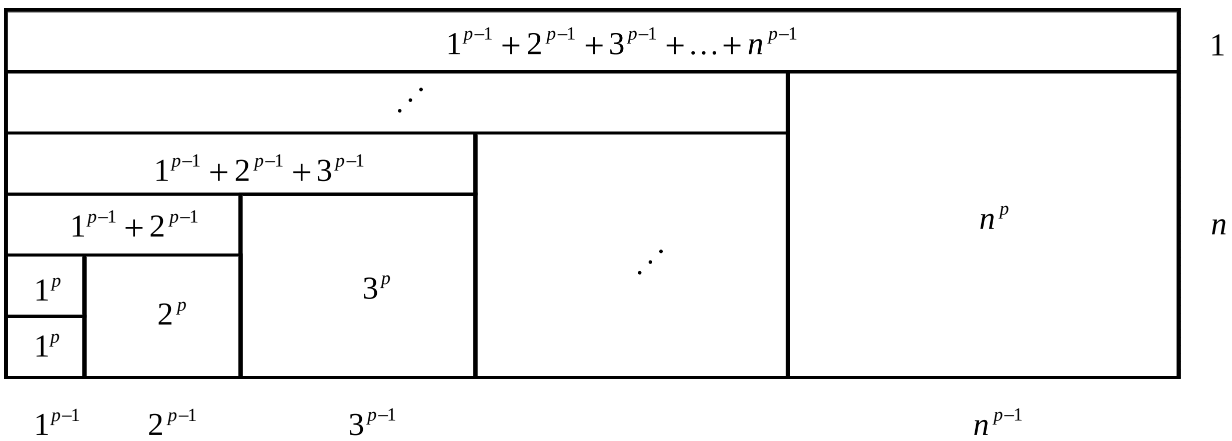
$$\overline{M}=\begin{bmatrix} 1^{p-1} & -2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (-1)^{n-1}\cdot n^{p-1} \\ 1^{p-1} & -2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (-1)^{n-1}\cdot n^{p-1} \\ 1^{p-1} & -2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (-1)^{n-1}\cdot n^{p-1} \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ 1^{p-1} & -2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (-1)^{n-1}\cdot n^{p-1} \end{bmatrix}$$

Az így nyert rekurziós képlet végső alakja:

$$S_p^* = (n+1)\cdot S_{p-1}^* - \sum_{k=1}^{n} S_{k;p-1}^* \,.$$

Közreadtuk az első négy pozitív egész p-re a formula speciális eseteit.

Ezzel a módszerrel mátrixaritmetikai fogalmak használata nélkül is elérhetjük a kívánt eredményt. Ehhez a kiinduló mátrix (táblázat) elemeinek „lépcsős” összegzését végeztük el. Emellett egy „alkalmas” ábra felhasználásával is szemléltettük a kívánt rekurzióhoz történő eljutást (1. ábra).



1. ábra

Itt a téglalap területét kétféleképpen kiszámítva jutottunk el a keresett formuláig.

2. A második esetben az összegzési feladatot egy speciális azonosságból kiindulva oldottuk meg. Nevezetesen:

$$(k+1)\cdot k^p - k\cdot(k-1)^p = (p+1)\cdot k^p - \binom{p}{2}\cdot k^{p-1} + \binom{p}{3}\cdot k^{p-2} - \binom{p}{4}\cdot k^{p-3} + \ldots + (-1)^{p+1}\cdot\binom{p}{p}\cdot k\,,$$

ahol k valós szám és p pozitív egész.

Rendre behelyettesítve a k helyébe az $1,2,\ldots,n$ pozitív egész számokat, a kapott összefüggéseket összegezve, az összevonások és átrendezés után a következő rekurziós formulát kaptuk:

$$(p+1)\cdot S_p = (n+1)n^p + \binom{p}{2}\cdot S_{p-1} - \binom{p}{3}\cdot S_{p-2} + \ldots + (-1)^p\cdot\binom{p}{p}\cdot S_1\,.$$

Itt is alkalmaztuk a képletet p néhány konkrét esetére.

A fenti gondolatmenethez hasonló módon, de itt két másik azonosságból kiindulva összefüggéseket tudtunk meghatározni az összegképletek között (a páratlan, illetve a páros indexekre). Általános formulákat adtunk meg, és ezeket néhány speciális esetre konkretizáltuk.

Páratlan index esetén a kiindulási összefüggés ($p\in Z^+$, $a\in R$):

$$[a\cdot(a+1)]^p-[(a-1)\cdot a]^p=2\cdot\binom{p}{1}\cdot a^{2p-1}+2\cdot\binom{p}{3}\cdot a^{2p-3}+2\cdot\binom{p}{5}\cdot a^{2p-5}+\dots,$$

míg az általános formula:

$$2^{p-1}\cdot S_1^p=\binom{p}{1}\cdot S_{2p-1}+\binom{p}{3}\cdot S_{2p-3}+\binom{p}{5}\cdot S_{2p-5}+\dots\quad.$$

A páros indexekre a kiindulási összefüggés ($p\in Z^+$, $a\in R$):

$$(2a+1)\cdot[a\cdot(a+1)]^p-(2a-1)\cdot[(a-1)\cdot a]^p=2\cdot a^{2p}\cdot\left[\binom{p}{0}+2\cdot\binom{p}{1}\right]+$$

$$+2\cdot a^{2p-2}\cdot\left[\binom{p}{2}+2\cdot\binom{p}{3}\right]+2\cdot a^{2p-4}\cdot\left[\binom{p}{4}+2\cdot\binom{p}{5}\right]+\dots,$$

az általános formula pedig:

$$3\cdot 2^{p-1}\cdot S_2\cdot S_1^{p-1}=\left[\binom{p}{0}+2\cdot\binom{p}{1}\right]\cdot S_{2p}+\left[\binom{p}{2}+2\cdot\binom{p}{3}\right]\cdot S_{2p-2}+\left[\binom{p}{4}+2\cdot\binom{p}{5}\right]\cdot S_{2p-4}+\dots\quad.$$

3. Rekurziós formulára vezet a binomiális tétel felhasználásán alapuló módszer is. Itt kezdő lépésként az alábbi összefüggésből indultunk ki ($a\in R$, $p\in N$):

$$(a+1)^{p+1}-a^{p+1}=\binom{p+1}{1}\cdot a^p+\binom{p+1}{2}\cdot a^{p-1}+\binom{p+1}{3}\cdot a^{p-2}+\dots+\binom{p+1}{p}\cdot a+\binom{p+1}{p+1}.$$

Rendre behelyettesítve az a helyébe az $1,2,\dots,n$ természetes számokat, a kapott összefüggéseket összegezve, összevonások és átrendezések után viszonylag rövid részletszámításokkal kaptuk, hogy:

$$(p+1)\cdot S_p=(n+1)^{p+1}-\binom{p+1}{2}\cdot S_{p-1}-\binom{p+1}{3}\cdot S_{p-2}-\dots-\binom{p+1}{p}\cdot S_1-\binom{p+1}{p+1}\cdot(n+1).$$

Itt is felírtuk a kapott összefüggés három speciális esetét.

Hasonló eljárással általánosítást végeztünk a számtani sorozatok esetére is, így rekurziós formulát írtunk fel az

$$S_p(a,d)=a_1^p+a_2^p+a_3^p+\dots+a_n^p=\sum_{i=1}^n a_i^p=\sum_{i=1}^n[a+(i-1)\cdot d]^p$$

összeg meghatározására, ahol a az $\{a_n\}_{n\geq1}$ számtani sorozat első eleme, míg d a sorozat differenciája ($a,d\in R$). Ez esetben az

$$a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}=\binom{p+1}{1}\cdot a_i^p\cdot d+\binom{p+1}{2}\cdot a_i^{p-1}\cdot d^2+\dots+\binom{p+1}{p}\cdot a_i^1\cdot d^p+\binom{p+1}{p+1}\cdot d^{p+1}$$

összefüggésből indultunk ki és a számítások végén a kapott formula:

$$(p+1)\cdot d\cdot S_p(a,d)=(a+nd)^{p+1}-a^{p+1}-\sum_{k=2}^{p+1}d^k\cdot\binom{p+1}{k}\cdot S_{p+1-k}(a,d).$$

A formula felhasználásával előállítottunk kilenc általános esetet, valamint ezeknek néhány, *a*-ra vonatkozó konkrét eredményét (összesen 27-et).

Kidolgoztuk a probléma megoldását az első n pozitív egész szám p-edik hatványa váltakozó előjelű összegére is. Ebben az esetben az

$$(a+2)^{p+1} - a^{p+1} = \binom{p+1}{1} \cdot a^p \cdot 2 + \binom{p+1}{2} \cdot a^{p-1} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{p+1}{p} \cdot a^1 \cdot 2^p + \binom{p+1}{p+1} \cdot 2^{p+1}$$

összefüggésből indultunk ki. Itt is rendre behelyettesítettük az a helyébe az $1,2,\ldots,n$ természetes számokat, majd megszoroztuk a felírt összefüggéseket felváltva 1-gyel és (-1)-gyel (az elsőt 1-gyel szorozva), ezután az így kapottakat összegeztük. A részletszámítások, összevonások és átrendezés után a rekurziós összefüggés:

$$2 \cdot (p+1) \cdot S_p^* = (-1)^{n-1} \cdot \left[(n+2)^{p+1} - (n+1)^{p+1} - 2^p\right] + 2^p - 1 - \sum_{k=2}^{p} \binom{p+1}{k} \cdot S_{p+1-k}^* \cdot 2^k .$$

Ezt követően felírtuk az alternáló összeg két speciális esetét.

A továbbiakban általánosítást végeztünk a számtani sorozat alternáló összegére. Itt a kiindulási összefüggés:

$$a_{i+2}^{p+1} - a_i^{p+1} = \binom{p+1}{1} \cdot a_i^p \cdot (2d)^1 + \binom{p+1}{2} \cdot a_i^{p-1} \cdot (2d)^2 + \ldots + \binom{p+1}{p} \cdot a_i^1 \cdot (2d)^p + \binom{p+1}{p+1} \cdot (2d)^{p+1} .$$

Az a helyébe ezúttal is rendre behelyettesítettük az $1,2,\ldots,n$ természetes számokat, majd a felírt összefüggéseket felváltva 1-gyel és (-1)-gyel megszoroztuk és ezeket összegeztük. A számítások után kapott előállítás eredménye az alábbi:

$$2d \cdot (p+1) \cdot S_p^*(a,d) = (-1)^{n-1} \cdot \left[a_{n+2}^{p+1} - a_{n+1}^{p+1} - d \cdot (2d)^p\right] +$$
$$+ a_2^{p+1} - a_1^{p+1} - d \cdot (2d)^p - \sum_{k=2}^{p} \binom{p+1}{k} \cdot S_{p+1-k}^*(a,d) \cdot (2d)^k .$$

Ez esetben is megadtunk három általános formulát, és ezek összesen 12 konkrét esetét.

4. A hatványösszegek kiszámítására vezető rekurziós összefüggést szimmetrikus összegek segítségével is elő lehetett állítani. Ehhez először definiáltuk az emelkedő és süllyedő faktoriális fogalmát, majd ismertettünk egy tulajdonságot ezekkel kapcsolatban.
Az emelkedő faktoriálishoz hozzárendeltünk egy sorozatot, melynek tagjai között rekurziós kapcsolatot teremtettünk a következőképpen:

$$[i]^{k+1} = \frac{1}{k+2} \cdot \left([i]^{k+2} - [i-1]^{k+2}\right), \text{ ahol } k = 0;1;2;\ldots \text{ és } i = 1;2;\ldots .$$

A felírt rekurziós összefüggés alapján az adott sorozat tagjait összegeztük. A kapott teleszkópikus összeg eredményével és az $1,2,\ldots,(p-1)$ számokhoz rendelt $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ szimmetrikus összegek

$$\begin{cases} s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) \\ s_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + (p-2) \cdot (p-1) \\ ------------------ \\ s_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \end{cases}$$

segítségével eljutottunk a kívánt rekurziós formulához, amelynek alakja:

$$S_p = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1} - \sum_{i=1}^{p-1} s_i \cdot S_{p-i} \ .$$

Akárcsak az előző módszereknél, itt is felírtuk a kapott formula speciális eseteit ($p = 3; 4; 5$).

Bevezettük a Bell- és Stirling-számokat, rekurziós összefüggéseket írtunk fel közöttük. Kapcsolatot teremtettünk többek között az emelkedő/süllyedő faktoriális, a Stirling-számok, valamint az x határozatlan pozitív egész kitevőjű hatványai között. Megadtuk az első n pozitív egész szám reciprokainak összegét az elsőfajú Stirling-számok segítségével, majd ismertettük a Catalan-összefüggést.

5. Az azonos kitevőjű hatványok összegzését elvégeztük a differenciálszámítás felhasználásával is. Ennél a módszernél a kívánt rekurziót egy „alkalmas” függvény deriválása segítségével kaptuk meg. E módszernél a kiinduló összefüggés az alábbi:

$\left(e^x - 1\right) \cdot F_n(x) = e^{(n+1)\cdot x} - e^x$, ahol $F_n(x) = \sum_{l=1}^{n} e^{l\cdot x}$, $n \in Z^+$.

Felírva az összefüggés mindkét oldalának $(p+1)$-edrendű deriváltját, majd x helyébe 0-át helyettesítve, a szükséges számítások után megoldásként az alábbi – a binomiális módszernél már megismert − rekurziós képlet adódott:

$$(p+1)\cdot S_p = (n+1)^{p+1} - \binom{p+1}{2}\cdot S_{p-1} - \binom{p+1}{3}\cdot S_{p-2} - \ldots - \binom{p+1}{p}\cdot S_1 - \binom{p+1}{p+1}\cdot (n+1).$$

A továbbiakban elvégeztük az általánosítást a számtani sorozatok esetére is. Ezúttal egy másik speciális függvényt − $F_n(x) = \sum_{l=1}^{n} e^{a_l \cdot x}$ − használtunk, s ekkor a következőt kaptuk eredményül:

$$(p+1)\cdot d \cdot S_p(a,d) = (a+nd)^{p+1} - a^{p+1} - \binom{p+1}{2}\cdot d^2 \cdot S_{p-1}(a,d) -$$
$$-\binom{p+1}{3}\cdot d^3 \cdot S_{p-2}(a,d) - \ldots - \binom{p+1}{p+1}\cdot d^{p+1}\cdot S_0(a,d).$$

A módszert az $F_n(x) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \cdot e^{l\cdot x}$ függvény segítségével alkalmaztuk az első n pozitív egész szám p-edik hatványa alternáló összegére is. Itt a végső formula:

$$2\cdot(p+1)\cdot S_p^* = (-1)^{n-1}\cdot\left[(n+2)^{p+1} - (n+1)^{p+1} - 2^p\right] + 2^p - 1 - \sum_{k=2}^{p}\binom{p+1}{k}\cdot S_{p+1-k}^* \cdot 2^k \ .$$

Ezután általánosítottunk a számtani sorozat alternáló összegére. A speciális függvény ($F_n(x) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \cdot e^{a_l\cdot x}$) felírása, a deriválások és a részletszámítások után a rekurziós képlet a következő alakot ölti:

$$2d\cdot(p+1)\cdot S_p^*(a,d) = (-1)^{n-1}\cdot\left[a_{n+2}^{p+1} - a_{n+1}^{p+1} - d\cdot(2d)^p\right] +$$
$$+ a_2^{p+1} - a_1^{p+1} - d\cdot(2d)^p - \sum_{k=2}^{p}\binom{p+1}{k}\cdot S_{p+1-k}^*(a,d)\cdot(2d)^k \ .$$

C. Nem rekurziós módszerek

A hatványösszegzés nem rekurziós formulára vezető módszereinél két megoldási eljárást mutattunk be. Ezek olyan képletekre vezetnek, amelyek az első n darab pozitív természetes szám p-edik hatványának összegét azonnal megadják, s ekkor nincs szükség a p-nél kisebb kitevőkre felírt összegekre.

1. Az összegzést először a differenciasorozatok felhasználásán alapuló módszer segítségével végeztük el. Ehhez értelmeztük a differenciasorozat fogalmát, majd definiáltuk mit értünk p-edrendű számtani sorozaton. Bebizonyítottuk, hogy bármely p-edrendű számtani sorozat k-adik tagja k-nak egy p-edfokú polinomjával adható meg. $\sigma_{n;p}$-vel jelölve a p-edrendű számtani sorozat első n tagjának összegét, megadtuk $\sigma_{n;p}$-t az egymás után következő differenciasorozatok kezdő tagjainak (a_1; Δa_1; $\Delta^2 a_1$; …; $\Delta^p a_1$) segítségével a következőképpen:

$$\sigma_{n;p} = \binom{n}{1}\cdot a_1 + \binom{n}{2}\cdot \Delta a_1 + \binom{n}{3}\cdot \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{p+1}\cdot \Delta^p a_1 .$$

   Ez esetben is felírtunk három konkrét esetet. Ezen túlmenően megadtunk a formula segítségével a számtani sorozatokra számított három általános és 12 speciális esetet.

2. A jelzett probléma megoldható lineáris algebrai ismeretek/eszközök felhasználásával is. E módszernél a következő azonosságból indultunk ki ($a \in R,\ k \in N$):

$$(a+1)^{k+1} - a^{k+1} = \binom{k+1}{1}\cdot a^k + \binom{k+1}{2}\cdot a^{k-1} + \binom{k+1}{3}\cdot a^{k-2} + \ldots + \binom{k+1}{k}\cdot a + \binom{k+1}{k+1}.$$

   Az összefüggésben az a helyébe rendre behelyettesítettük az $1, 2, \ldots, n$ számokat, az egyenlőségeket oldalanként összegeztük, majd átrendezéssel kaptuk hogy:

$$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{k+1}\cdot(n+1) + \binom{k+1}{k}\cdot S_1 + \binom{k+1}{k-1}\cdot S_2 + \ldots + \binom{k+1}{2}\cdot S_{k-1} + \binom{k+1}{1}\cdot S_k .$$

   A kapott relációhoz hozzárendeltünk egy speciális lineáris egyenletrendszert, amely úgy adódott, hogy a k helyére rendre behelyettesítettük a $0, 1, 2, \ldots, p$ értékeket (az $X_0 = n+1$):

$$\begin{cases} n+1 = \binom{1}{1}\cdot X_0 \\ (n+1)^2 = \binom{2}{2}\cdot X_0 + \binom{2}{1}\cdot S_1 \\ (n+1)^3 = \binom{3}{3}\cdot X_0 + \binom{3}{2}\cdot S_1 + \binom{3}{1}\cdot S_2 \\ ------------------------------------ \\ (n+1)^p = \binom{p}{p}\cdot X_0 + \binom{p}{p-1}\cdot S_1 + \binom{p}{p-2}\cdot S_2 + \ldots + \binom{p}{2}\cdot S_{p-2} + \binom{p}{1}\cdot S_{p-1} \\ (n+1)^{p+1} = \binom{p+1}{p+1}\cdot X_0 + \binom{p+1}{p}\cdot S_1 + \binom{p+1}{p-1}\cdot S_2 + \ldots + \binom{p+1}{2}\cdot S_{p-1} + \binom{p+1}{1}\cdot S_p . \end{cases}$$

Az így kapott $(p+1)$ egyenletből álló egyenletrendszerben ismeretleneknek tekintettük az $S_1, S_2, ..., S_p$ „szimbólumokat” és bebizonyítottuk, hogy a lineáris egyenletrendszer a Cramer-szabállyal megoldható.

Így S_p-re a következő formulát kaptuk:

$$S_p = \frac{1}{(p+1)!} \cdot \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & ... & 0 & n+1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 0 & ... & 0 & (n+1)^2 \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & ... & 0 & (n+1)^3 \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ \binom{p}{p} & \binom{p}{p-1} & \binom{p}{p-2} & ... & \binom{p}{1} & (n+1)^p \\ \binom{p+1}{p+1} & \binom{p+1}{p} & \binom{p+1}{p-1} & ... & \binom{p+1}{2} & (n+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

Ismételten elvégeztük a konkrét összeg kiszámítását három esetben.

Ezután a módszert általánosítottuk a számtani sorozatokra. Az elvégzett számítások után a kapott formula a következő:

$$S_p(a,d) = \frac{1}{(p+1)! \cdot d^{p+1}} \cdot D'_p \text{, ahol}$$

$$D'_p = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} \cdot d & 0 & ... & 0 & (a+nd)^1 - a^1 \\ \binom{2}{2} \cdot d^2 & \binom{2}{1} \cdot d & ... & 0 & (a+nd)^2 - a^2 \\ \binom{3}{3} \cdot d^3 & \binom{3}{2} \cdot d^2 & ... & 0 & (a+nd)^3 - a^3 \\ ----- & ----- & --- & ----- & ------ \\ \binom{p}{p} \cdot d^p & \binom{p}{p-1} \cdot d^{p-1} & ... & \binom{p}{1} \cdot d & (a+nd)^p - a^p \\ \binom{p+1}{p+1} \cdot d^{p+1} & \binom{p+1}{p} \cdot d^p & ... & \binom{p+1}{2} \cdot d^2 & (a+nd)^{p+1} - a^{p+1} \end{vmatrix}$$

A módszer további hozadéka, hogy jól alkalmazható a Bernoulli-számok kiszámítására is. Ennek igazolásaképpen munkánkban be is mutattuk ezt. A $(p+1)$-edik Bernoulli-szám az alábbi képlettel adható meg:

$$B_p = \frac{1}{(p+1)!} \cdot \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & \ldots & 0 & 0 \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ \binom{p}{p} & \binom{p}{p-1} & \binom{p}{p-2} & \ldots & \binom{p}{1} & 0 \\ \binom{p+1}{p+1} & \binom{p+1}{p} & \binom{p+1}{p-1} & \ldots & \binom{p+1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

ahol $p = 0;1;2;3;\ldots$.

Példaként a fenti formulával kiszámítottunk két Bernoulli-számot (B_4 és B_5). Ezen túlmenően bebizonyítottuk, hogy B_1 kivételével valamennyi páratlan indexű Bernoulli-szám nulla, illetve hogy B_p egy másik – szintén determinánssal történő – előállítása

$$B_p = \frac{1}{p\text{¡}} \cdot \begin{vmatrix} 1\text{¡} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 2\text{¡} & 1\text{¡} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 3\text{¡} & 2\text{¡} & 1\text{¡} & \ldots & 0 & 0 \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ p\text{¡} & (p-1)\text{¡} & (p-2)\text{¡} & \ldots & 2\text{¡} & 0 \\ (p+1)\text{¡} & p\text{¡} & (p-1)\text{¡} & \ldots & 1\text{¡} & 0 \end{vmatrix}, \text{ ahol } n\text{¡} = \frac{1}{n!}$$

egyenértékű az általunk megadottal.

A fejezet végén összefüggéseket mutattunk be a Stirling- és a Bernoulli-számok között, illetve bebizonyítottuk az első *n* pozitív egész szám *p*-edik hatványának összege és a Bernoulli-számok között fennálló kapcsolatot, ami a következő:

$$S_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} \cdot B_k \cdot (n+1)^{p+1-k} .$$

Végezetül megemlítjük, hogy a könnyebb érthetőség érdekében és az alkalmazott módszereket gazdagítandó, több fejezetben, valamint a függelékben is szemléletes bizonyításokkal (ábrákkal) tettük változatosabbá az aktuális mondanivalót.

IV. Az értekezés tárgyköréhez kapcsolódó publikációk

Molnár István: *Pozitív racionális szám felbontása egyiptomi törtek összegére*, A Matematika Tanítása 5 (2007), 19-22.

Molnár István: *Az* $x^{-n}+y^{-n}=z^{-n}$ *egyenletről*, A Matematika Tanítása, 1 (2009), 3-9.

Molnár István: *Egy ötlet: Alkalmazzuk a Catalan-összefüggést!*, POLYGON, XVII/1-2 (2008), 125-133.

Molnár István: *Egy ötlet: A Catalan-összefüggés általánosításai és a kapott formulák alkalmazásai*, POLYGON, XIX/1 (2010), 63-75.

Molnár István: *Some thoughts on a student survey*, Teaching Mathematics and Computer Science, 8/1 (2010), 41-59.

Molnár István: *The sum of the same powers of the first n positive integers and the Bernoulli numbers*, Teaching Mathematics and Computer Science (megjelenés alatt)

V. Felhasznált irodalom

Könyvek, monográfiák

[1] Ambrus András: *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995

[2] Freud Róbert – Gyarmati Edit: *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000

[3] Hajnal Péter: *Összeszámlálási problémák*, POLYGON Kiadó, Szeged, 1997

[4] Knuth, Donald E.: *A számítógép-programozás művészete 1*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994

[5] Neugebauer, Otto: *Egzakt tudományok az ókorban*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[6] Pólya György: *A gondolkodás iskolája*, Bibliotheca Kiadó, Budapest, 1957

[7] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967

[8] Pólya György: *A matematikai gondolkodás művészete I.*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1988

[9] Sain Márton: *Nincs királyi út!*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986

[10] Sirețchi, Gh.: *Calcul diferențial şi integral I.*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[11] Szász Pál: *A differenciál-és integrálszámítás elemei I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000

[12] Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

[13] Tomescu, Ioan: *Kombinatorika és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

[14] Tóth László: *Kombinatorika*, PTE TTK, Pécs, 2007

Cikkek, tanulmányok

[15] Acu, Dumitru: *Egy új képlet az első n természetes szám azonos hatványai összegének kiszámítására*, Matematikai Lapok 8 (8/1985), 282-285

[16] Akiyama, Shigeki – Tanigawa, Yoshio: *Multiple zeta values at non-positive integers*, The Ramanujan Journal Vol. 5. No. 4. (2001), 327-351

[17] Bencze Mihály: *About the sum* $\left[\sqrt[k]{1}\right]^p + \left[\sqrt[k]{2}\right]^p + \ldots + \left[\sqrt[k]{n}\right]^p$, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 9, No. 1A (2001), 126-135

[18] Kaneko, Masanobu: *The Akiyama-Tanigawa algorithm for Bernoulli numbers*, Journal of Integer Sequences, Vol. 3 (2000), Article 00.2.9.

[19] Kiss Sándor: *Kísérlet az* $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ *összeg zárt alakban való előállítására*, Matlap 9 (2008/9), 327-330

[20] Konovalov, Sz.: *Sorozatok metamorfózisai* (orosz nyelven), Kvant No. 6 (1998) 24-26

[21] **Molnár István**: *Pozitív racionális szám felbontása egyiptomi törtek összegére*, A Matematika Tanítása 5 (2007), 19-22

[22] **Molnár István**: *Az* $x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$ *egyenletről*, A Matematika Tanítása, 1 (2009), 3-9

[23] **Molnár István**: *Egy ötlet: Alkalmazzuk a Catalan-összefüggést!*, POLYGON, XVII/1-2 (2008), 125-133

[24] **Molnár István**: *Egy ötlet: A Catalan-összefüggés általánosításai és a kapott formulák alkalmazásai*, POLYGON, XIX/1 (2010), 63-75

[25] **Molnár, István**: *Some thoughts on a student survey*, Teaching Mathematics and Computer Science, 8/1 (2010), 41-59

[26] **Molnár István**: *The sum of the same powers of the first n positive integers and the Bernoulli numbers*, Teaching Mathematics and Computer Science (megjelenés alatt)

[27] Pengelley, David J.: *The bridge between the continuous and the discrete via original sources*, Study the Masters: The Abel-Fauvel Conference, Kristiansand, 2002

[28] Schultz, Henry J.: *The Sum of the kth Powers of the First n Integers*, American Mathematical Monthly, 87 (1980), 478-481

Probléma- és feladatgyűjtemények

[29] Cucurezeanu, Ion: *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976

[30] Kántor Sándorné – Kántor Sándor: *Nemzetközi magyar matematikai versenyek*, Studium, Debrecen, 1999

[31] Kosztolányi József – Makay Géza – Pintér Klára – Pintér Lajos: *Matematikai problémakalauz I.*, POLYGON Kiadó, Szeged, 1999

[32] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, Washington, 1993

[33] Popescu, Dragoş – Oboroceanu, George: *Exerciții şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria numerelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

[34] Dobos Sándor – Reiman István: *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959-2003*, Typotex Kiadó, Budapest, 2003

[35] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000

[36] Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából 1986-1995 Válogatás*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996

[37] Sierpiński, Wacław: *200 feladat az elemi számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972

[38] Skljarszki D.O. – Csencov N.N. – Jaglom I.M.: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000

[39] Tomescu, Ioan: *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[40] Trandafir, Rodica – Leonte, Alexandru: *Culegere de probleme şi exerciţii de matematică*, Editura Junimea, Iaşi, 1976

Folyóiratok, internetes források

[41] KöMaL 1996-2010

[42] Matlap (Matematikai Lapok) 1985-2010

[43] A Matematika Tanítása 2000-2010

[44] http://www.sztaki.hu/~keri/math/psum.htm

[45] http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number

[46] http://mathworld.wolfram.com/PowerSum.html

[47] http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=3284

[48] http://seriesmathstudy.com/sms/finitealternativeodd